

РЕШЕНИЕ СОПРЯЖЁННЫХ ЗАДАЧ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ

Лабораторная работа №7, 8

План занятия:

1. Цель работы
2. Дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя
3. Моделирование турбулентности. Турбулентная вязкость и число Прандтля.
4. Модель турбулентности Прандтля
5. Описание решаемой задачи
6. Метод решения
7. Порядок проведения моделирования
8. Содержание отчёта
9. Контрольные вопросы

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сопряжённый расчёт турбулентного динамического и теплового пограничных слоёв на пластине **по неявной схеме** с устранением нелинейности методом простых итераций. Моделирование турбулентности с использованием простой алгебраической модели Прандтля.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Освоенные на предыдущих занятиях методы решения уравнений пограничного слоя и полученный опыт позволяют приступить к решению задач турбулентного трения и теплообмена. Но, прежде чем приступить к их решению, нам необходимо определить, чем отличаются уравнения для ламинарного и турбулентного режима течения.

При выводе уравнений пограничного слоя мы нигде не оговаривали режим течения, однако получить решение для турбулентного течения в пограничном слое по известным нам уравнениям не получится. **Турбулентность – это, по сути, процесс зарождения распространения, взаимодействия и диссипации нестационарных вихрей связанных с неустойчивостью вязкого течения.** Для расчёта каждого из них и их общего воздействия на пограничный слой требуется решение трёхмерных и нестационарных задач динамики жидкости, что выходит за рамки теории пограничного слоя.

Хотя прямое описание турбулентности затруднено, в её развитии можно выделить определённые закономерности и построить, так называемую модель турбулентности, которую в дальнейшем можно применить для решения тех или иных задач пограничного слоя.

Как было показано на лекциях, проводя процедуру осреднения уравнений по времени, можно получить систему уравнений пограничного слоя с дополнительными членами, учитывающими влияние турбулентных пульсаций на осреднённое движение. Полученные таким образом **дополнительные напряжения и дополнительный турбулентный перенос тепла** не определены заранее и зависят от динамики течения, свойств турбулентности и т.д. Осреднённая система уравнений, таким образом, становится незамкнутой, и для её решения требуются дополнительные уравнения, связывающие турбулентные величины с параметрами осреднённого течения.

С учётом этих дополнительных членов систему уравнений турбулентного пограничного слоя можно записать в виде:

уравнение неразрывности (сохранения массы):

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

уравнения движения (сохранения импульсов):

по оси x

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} - \rho \langle w'_y w'_x \rangle \right) - \frac{dp}{dx}, \quad (2)$$

по оси y

$$p = \text{const} \quad (3)$$

уравнение энергии:

$$\rho w_x c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_y c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - c_p \rho \langle w'_y T' \rangle \right) + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \mu \left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial y} \right)^2 \right\rangle + w_x \frac{dp}{dx} \quad (4)$$

Здесь: ρ - плотность движущейся среды [кг/м³], w_x, w_y - продольная и поперечная скорость потока [м/с], p - давление [Па], μ - коэффициент динамической вязкости среды, [Па с] x, y - продольная и поперечная координаты, c_p - удельная массовая теплоёмкость среды, [Дж/(кг град)], T - температура потока, [K], λ - коэффициент теплопроводности среды, [Вт/(м град)].

В рамках данной работы мы будем считать, что параметры состояния связаны **уравнением состояния идеального газа**. Это предположение, очевидно, справедливо только для газовых сред при низких давлениях.

$$p = \rho RT, \quad (5)$$

где: $R = 8314,31/M$ - газовая постоянная, [Дж/(кг град)], M - молекулярный вес, [г/моль].

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ И ЧИСЛО ПРАНДТЛЯ.

В практических расчётах турбулентных пограничных слоёв часто пользуются предположением о том, что турбулентные пульсации как бы увеличивают вязкость жидкости (**гипотеза Бусинеска**). Оно основано на том, что в турбулентном пограничном слое увеличивается трение, теплообмен и массообмен и это эквивалентно тому, как если бы при ламинарном режиме течения мы заменили бы жидкость на более вязкую. Однако следует отметить, что если **молекулярная вязкость – это свойство жидкости и зависит только от параметров потока, таких как температура и давление, то турбулентная вязкость в основном зависит только от динамики течения и может значительно изменяться даже по толщине пограничного слоя.**

Запишем выражение для турбулентных пульсаций входящих в уравнения пограничного слоя (1) - (4), с учётом определения турбулентной вязкости:

$$-\rho \langle w'_y w'_x \rangle = \mu_t \frac{\partial w_x}{\partial y},$$

$$-c_p \rho \langle w'_y T' \rangle = \lambda_t \frac{\partial T}{\partial y} = c_p \frac{\lambda_t}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} = c_p \frac{\lambda_t}{c_p \mu_t} \mu_t \frac{\partial T}{\partial y} = c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial y} \text{ и}$$

$$\mu \left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial y} \right)^2 \right\rangle = \mu_t \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2.$$

Часто турбулентную теплопроводность заменяют отношением **турбулентной вязкости к турбулентному числу Прандтля**, это связано с тем, что турбулентный теплоперенос, как и турбулентный перенос импульса в большей степени зависит от гидродинамики течения. Турбулентное число Прандтля либо принимают постоянной величиной близкой к 1 либо моделируют некоторым образом, подобно моделированию турбулентной вязкости.

4. МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРАНДТЛЯ

Алгебраические модели турбулентности строятся в основном на гипотезе длины пути смешения, выдвинутой Прандтлем. Прандтль предположил, что турбулентная вязкость пропорциональна градиенту скорости потока в направлении перпендикулярном поверхности, а коэффициент пропорциональности представляет собой **длину пути смешения, т.е. путь который проходит некоторый конечный объём жидкости поперёк пограничного слоя под действием турбулентной пульсации без изменения своего импульса**. Модели, построенные на этих предположениях, имеют вид обыкновенных алгебраических уравнений относительно величины турбулентной вязкости.

Уравнение для турбулентной вязкости в модели Прандтля записывается следующим образом:

$$\mu_t = \rho \cdot l_m^2 \left| \frac{\partial w_x}{\partial y} \right|, \quad (6)$$

где l_m - длина пути смешения. Длина пути смешения является достаточно сложной функцией и для её адекватного описания требуется привлечение экспериментальной информации. Так известно, что пристенный турбулентный пограничный слой можно разбить на две части: вблизи стенки располагается **ламинарный подслой, где турбулентная вязкость и длина пути смешения близки к нулю и турбулентное ядро, где длина пути смешения практически постоянна**.

В модели Прандтля длина пути смешения рассчитывается следующим образом:

$$l_m = \begin{cases} C_k y \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right), \\ C_l \delta, \end{cases} \quad (7)$$

где первое уравнение относится к ламинарному подслою, а второе к турбулентному ядру. Переход от ламинарного подслоя к турбулентному ядру определяется в зависимости от у

из условия: $C_k y \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right) = C_l \delta$. Здесь $y^+ = v^+ \frac{\rho y}{\mu}$, $v^+ = w_{x0} \sqrt{\frac{c_f}{2}}$ - скорость трения,

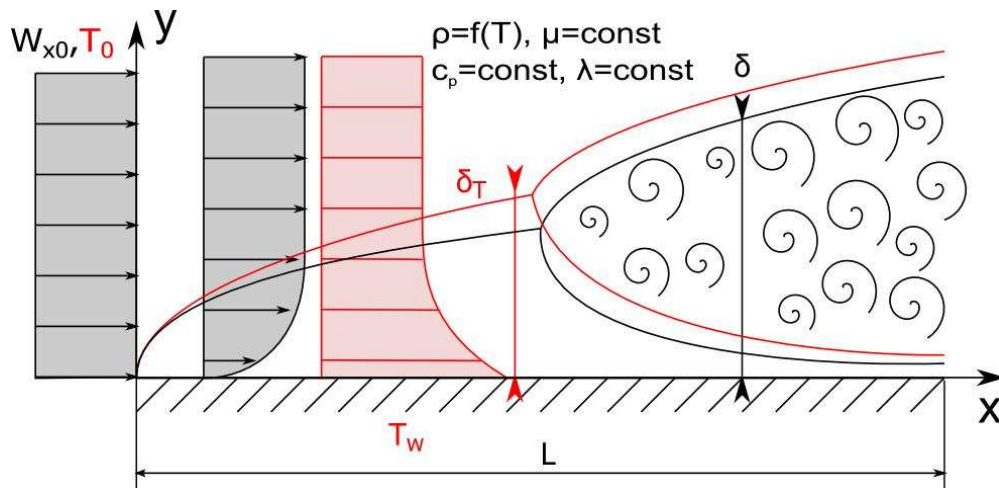
$\frac{c_f}{2} = \frac{\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{ст}}{\rho_0 w_{x0}^2}$ - коэффициент трения на стенке; δ - толщина пограничного слоя, определённая по критерию $(0.995 \cdot u_0)$.

Константы модели: $A^+ = 26$, $C_K = 0.41$ - постоянная Кармана, $C_1 = 0.089$.

Турбулентное число Прандтля при расчёте теплообмена по модели Прандтля, как правило, выбирается постоянным: $Pr_t = 0,9$.

5. ОПИСАНИЕ РЕШАЕМОЙ ЗАДАЧИ

Целью сегодняшней лабораторной работы является расчёт турбулентного динамического и теплового пограничных слоёв на пластине **по неявной схеме** с устранением нелинейности методом простых итераций. Описать турбулентность следует с использованием модели Прандтля. Схема течения представлена на рисунке:



Будем считать, что теплоёмкость среды постоянна ($c_p = \text{const}$), вязкость и теплопроводность среды также будем считать постоянными, но уравнения пограничного слоя запишем в более общем виде – для переменных коэффициентов переноса. Градиенты давления и температуры вдоль пластины равны нулю. Система уравнений (1)-(7) в этом случае может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} &= 0, \\ \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \\ \rho w_x c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_y c_p \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Для решения данной системы уравнений определим граничные условия для искомым переменных w_x, w_y, T . В рассматриваемом случае:

на входе: $w_x(x, y) = w_x(0, y) = w_{x0}$; $w_y(x, y) = w_y(0, y) = 0$; $T(x, y) = T(0, y) = T_0$;

на стенке: $w_x(x, y) = w_x(x, 0) = 0$; $w_y(x, y) = w_y(x, 0) = 0$; $T(x, y) = T(x, 0) = T_w$;

во внешнем потоке: $w_x(x, y) = w_x(x, \delta) = w_{x0}$; $T(x, y) = T(x, \delta) = T_0$.

Для описания турбулентности будем использовать модель Прандтля, представленную в предыдущем параграфе. Поскольку модель Прандтля относится к алгебраическим моделям турбулентности, задавать какие-либо дополнительные граничные условия не требуется.

Как и в случае ламинарного режима течения, интегральные параметры (коэффициент трения, коэффициент теплоотдачи, локальные и средние числа Нуссельта) в существенной степени будут определяться свойствами среды (числом Прандтля - $Pr = \mu c_p / \lambda$), скоростью набегающего потока (числом Маха - $M_0 = w_{x0} / a_0$, где $a_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$ - локальная скорость звука при параметрах набегающего потока, γ - показатель адиабаты) и фактором неизотермичности $\psi = T_w / T_0$. В качестве результатов расчётов следует получить зависимости:

$$\begin{aligned} \frac{c_f}{2} &= f(Re, Pr, M_0, \psi) \\ Nu &= f(Re, Pr, M_0, \psi) \end{aligned} \quad (9)$$

Если число Прандтля близко к 1, а теплообмен происходит в низкоскоростном потоке в слабонейзотермических условиях, то для верификации полученных данных можно воспользоваться соотношением:

$$Nu = 0.0296 Re_x^{0.8} Pr_0^{0.43} \left(\frac{Pr_0}{Pr_{cr}} \right)^{0.25}, \quad (10)$$

индексом «0» в данном случае обозначены комплексы, рассчитываемые по параметрам в набегающем потоке, а индексом «ст» - по параметрам на стенке. Существует достаточно большое кол-во других корреляции, полученных как экспериментально, так и теоретическими методами, однако диапазон их применимости не охватывает всех возможных значений определяющих параметров задачи.

Локальный коэффициент сопротивления трения для рассматриваемой задачи принято рассчитывать по формуле:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_w}{\rho w_{x0}^2}, \quad (11)$$

локальное число Нуссельта:

$$Nu = \frac{\alpha x}{\lambda} = \frac{q_w}{(T_0 - T_w)} \frac{x}{\lambda} = \frac{-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w}{(T_0 - T_w)} \frac{x}{\lambda}, \quad (12)$$

локальное число Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho w_{x0} x}{\mu}, \quad (13)$$

за характерный размер выбрано расстояние от начала пластины, все свойства определяются по параметрам набегающего потока.

6. МЕТОД РЕШЕНИЯ

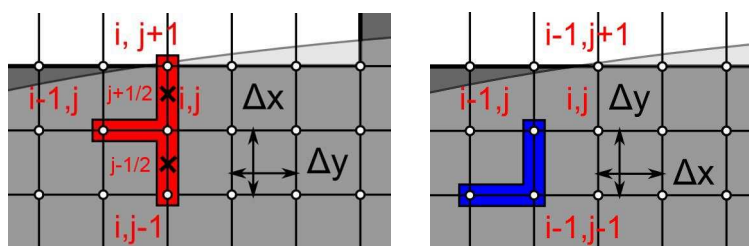
В данной лабораторной работе мы воспользуемся **неявной схемой дискретизации** и получим решение уравнений пограничного слоя в **сопряжённой постановке**, при совместном решении уравнений энергии, движения, неразрывности и модели турбулентности. Для этого воспользуемся **методом простых итераций**. Используемый метод подробно расписан в методических материалах к предыдущей лабораторной работе. В данных материалах опишем **лишь ключевые отличия**.

Высоту расчётной области определим из оценок толщин теплового и динамического пограничных слоёв при турбулентном режиме течения:

$$\delta_L = p \cdot \max \left(\frac{0.37L}{Re_L^{0.2}}, \frac{0.37L}{Re_L^{0.2} Pr^{0.6}} \right), \quad (14)$$

где: p - коэффициент запаса расчётной сетки, обычно выбирается от 2 до 5.

Для **неявного метода** решения уравнений пограничного слоя шаблоны дискретизации для уравнений движения и энергии представлены на левом рисунке снизу, для уравнения неразрывности на правом:



Большая часть выражений для производных, входящих в уравнения (8) получена нами ранее. Следует уделить внимание только способу дискретизации второй производной вида: $\frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j}$, входящей в уравнения движения и энергии. Для

получения дискретного аналога этой производной заменим $A \frac{\partial f}{\partial y} = g$ и распишем полученную первую производную через значения функции g условно в «полуцелых» узлах $j+1/2$ и $j-1/2$. На рисунке обозначены крестами. В итоге получим:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{i,j} = \left(\frac{g_{i,j+1/2} - g_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right)_{i,j}.$$

В свою очередь функцию g в «полуцелых» узлах можно расписать так:

$$g_{i,j+1/2} = \left(A \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} = A_{i,j+1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} = A_{i,j+1/2} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} \right) = \frac{A_{i,j+1} + A_{i,j}}{2} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} \right),$$

$$g_{i,j-1/2} = \left(A \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j-1/2} = A_{i,j-1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j-1/2} = A_{i,j-1/2} \left(\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} \right) = \frac{A_{i,j} + A_{i,j-1}}{2} \left(\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} \right).$$

Итоговое соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{A_{i,j+1} + A_{i,j}}{2} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} \right) - \frac{A_{i,j} + A_{i,j-1}}{2} \left(\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \right)$$

Подставляя полученные соотношения в систему уравнений (8), можно записать дискретный аналог уравнений **теплового пограничного слоя**:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \rho_{i,j}(\mathbf{w}_x)_{i,j} \left(\frac{(\mathbf{w}_x)_{i,j} - (\mathbf{w}_x)_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + \rho_{i,j}(\mathbf{w}_y)_{i,j} \left(\frac{(\mathbf{w}_x)_{i,j} - (\mathbf{w}_x)_{i,j-1}}{\Delta y} \right) = \\
& = \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{(\mu + \mu_t)_{i,j+1} + (\mu + \mu_t)_{i,j}}{2} \left(\frac{(\mathbf{w}_x)_{i,j+1} - (\mathbf{w}_x)_{i,j}}{\Delta y} \right) - \frac{(\mu + \mu_t)_{i,j} + (\mu + \mu_t)_{i,j-1}}{2} \left(\frac{(\mathbf{w}_x)_{i,j} - (\mathbf{w}_x)_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \right); \\
& \frac{\rho_{i,j-1}(\mathbf{w}_x)_{i,j-1} - \rho_{i-1,j-1}(\mathbf{w}_x)_{i-1,j-1}}{\Delta x} + \frac{\rho_{i,j}(\mathbf{w}_y)_{i,j} - \rho_{i,j-1}(\mathbf{w}_y)_{i,j-1}}{\Delta y} = 0; \\
& c_p \rho_{i,j}(\mathbf{w}_x)_{i,j} \left(\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + c_p \rho_{i,j}(\mathbf{w}_y)_{i,j} \left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \right) = \\
& = \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j+1} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j}}{2} \left(\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \right) - \frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j-1}}{2} \left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \right) + \\
& + (\mu + \mu_t)_{i,j} \left(\frac{(\mathbf{w}_x)_{i,j} - (\mathbf{w}_x)_{i,j-1}}{\Delta y} \right)^2; \\
& \rho_{i,j} = p / RT_{ij}, \\
& \mu_{i,j} = \mu_0, \\
& \lambda_{i,j} = \lambda_0, \\
& (\mu_t)_{i,j} = f(y, c_f / 2 \dots), \\
& (Pr_t)_{i,j} = 0.9.
\end{aligned} \right. \tag{15}$$

Следует обратить внимание на то, что на расчётном i -ом слое по координате x неизвестными в системе уравнений (15) являются сразу несколько переменных $(\mathbf{w}_x)_{i,j+1}, (\mathbf{w}_x)_{i,j}, (\mathbf{w}_x)_{i,j-1}, (\mathbf{w}_y)_{i,j}, T_{i,j+1}, T_{i,j}, T_{i,j-1}$ и $\rho_{ij}, \mu_{ij}, \lambda_{ij}, (\mu_t)_{ij}, (Pr_t)_{ij}$. Синим выделены параметры, относящиеся к турбулентным характеристикам течения, определяемым из решения уравнений модели турбулентности.

В уравнениях движения и энергии каждая неизвестная связана с решением на соседних по j узлах расчётной сетки, остальные уравнения решаются явно. Для уравнений движения и энергии запишем выражения для коэффициентов трёхдиагональной матрицы:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left(\frac{\rho_{i,j}(\mathbf{w}_y)_{i,j}}{\Delta y} - \frac{(\mu + \mu_t)_{i,j} + (\mu + \mu_t)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} \right)}_{a_j} (\mathbf{w}_x)_{i,j-1} + \\
& + \underbrace{\left(\frac{\rho_{i,j}(\mathbf{w}_x)_{i,j}^*}{\Delta x} + \frac{\rho_{i,j}(\mathbf{w}_y)_{i,j}}{\Delta y} + \frac{(\mu + \mu_t)_{i,j+1} + 2(\mu + \mu_t)_{i,j} + (\mu + \mu_t)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} \right)}_{b_j} (\mathbf{w}_x)_{i,j} - \\
& - \underbrace{\frac{(\mu + \mu_t)_{i,j+1} + (\mu + \mu_t)_{i,j}}{2\Delta y^2}}_{c_j} (\mathbf{w}_x)_{i,j+1} = \underbrace{\frac{\rho_{i,j}(\mathbf{w}_x)_{i,j}^*}{\Delta x}}_{d_j} (\mathbf{w}_x)_{i-1,j};
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left(\frac{c_p \rho_{i,j} (w_y)_{i,j}}{\Delta y} - \frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} \right)}_{a_j} T_{i,j-1} + \\
& + \underbrace{\left(\frac{c_p \rho_{i,j} (w_x)_{i,j}}{\Delta x} + \frac{c_p \rho_{i,j} (w_y)_{i,j}}{\Delta y} + \frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j+1} + 2 \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} \right)}_{b_j} T_{i,j} - \\
& \underbrace{\left(\frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j+1} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j}}{2\Delta y^2} \right)}_{c_j} T_{i,j+1} = \underbrace{\frac{c_p \rho_{i,j} (w_x)_{i,j}}{\Delta x} T_{i-1,j} + (\mu + \mu_t)_{i,j} \left(\frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i,j-1}}{\Delta y} \right)^2}_{d_j} \quad (17)
\end{aligned}$$

Коэффициенты трёхдиагональной матрицы для граничных условий не изменились и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \boxed{0(w_x)_{i,-1}} + 1(w_x)_{i,0} + 0(w_x)_{i,1} = 0 \Rightarrow \boxed{(w_x)_{i,0} = 0} \\
& \boxed{0(w_x)_{i,k-1}} + 1(w_x)_{i,k} + \boxed{0(w_x)_{i,k+1}} = w_{x0} \Rightarrow \boxed{(w_x)_{i,k} = w_{x0}} \\
& \boxed{0T_{i,-1}} + 1T_{i,0} + 0T_{i,1} = T_w \Rightarrow \boxed{T_{i,0} = T_w} \\
& \boxed{0T_{i,k-1}} + 1T_{i,k} + \boxed{0T_{i,k+1}} = T_0 \Rightarrow \boxed{T_{i,k} = T_0}
\end{aligned} \quad (18)$$

Объединяя уравнения (16), (18) и записывая систему линейных уравнений в матричной форме, получим две **трёхдиагональные матрицы, которые можно решить методом Томаса**.

Поскольку в рассматриваемой задаче решение уравнения энергии влияет на решение уравнений движения и неразрывности и наоборот, то на каждом шаге интегрирования необходимо свести решения отдельных уравнений к общему решению. Для этого можно применить **метод простых итераций** (метод простой итерационной замены переменных). Для получения решения методом простых итераций необходимо:

1. Сохранить значения всех переменных на i -ом слое в массивах промежуточных значений переменных $\rho_{i,j}^*, T_{i,j}^*, (w_x)_{i,j}^*, (w_y)_{i,j}^*, \mu_{i,j}^*, \lambda_{i,j}^*, (\mu_t)_{i,j}^*, (Pr_t)_{i,j}^*$;
2. Получить новое решение $\rho_{i,j}, T_{i,j}, (w_x)_{i,j}, (w_y)_{i,j}, \mu_{i,j}, \lambda_{i,j}, (\mu_t)_{i,j}, (Pr_t)_{i,j}$;
3. Сравнить полученное решение с сохранённым во всех точках на i -ом слое:

$$\begin{aligned}
|(\rho_{i,j}^* - \rho_{i,j}) / \rho_{i,j}| &\leq \varepsilon \\
|(\mu_{i,j}^* - \mu_{i,j}) / \mu_{i,j}| &\leq \varepsilon \\
|(\lambda_{i,j}^* - \lambda_{i,j}) / \lambda_{i,j}| &\leq \varepsilon \\
|((\mu_t)_{i,j}^* - (\mu_t)_{i,j}) / (\mu_t)_{i,j}| &\leq \varepsilon \\
|((Pr_t)_{i,j}^* - (Pr_t)_{i,j}) / (Pr_t)_{i,j}| &\leq \varepsilon \\
|(T_{i,j}^* - T_{i,j}) / T_{i,j}| &\leq \varepsilon \\
|((w_x)_{i,j}^* - (w_x)_{i,j}) / (w_x)_{i,j}| &\leq \varepsilon \\
|((w_y)_{i,j}^* - (w_y)_{i,j}) / (w_y)_{i,j}| &\leq \varepsilon
\end{aligned}
\tag{19}$$

4. Если необходимая относительная погрешность вычислений - ε в решении не достигнута, повторить итерацию.

Для решения уравнений пограничного слоя обычно достаточно обеспечить $\varepsilon = 10^{-3}$, для чего требуется от 3 до 10 итераций на каждом на i -ом шаге. Скорость сходимости решения, **как правило**, увеличивается по мере роста толщины пограничного слоя и снижения градиентов скорости и температуры на стенке.

Уравнения записаны нами в общем виде и при постоянных значениях вязкости и теплопроводности, очевидно, сводить итерационную процедуру по этим параметра не нужно. Однако сведение итераций по турбулентной вязкости необходимо всегда.

7. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Получить задание для моделирования течения и теплообмена в турбулентном пограничном слое на пластине:

Среда	μ , [Па с]	c_p , [Дж/(кг град)]	λ , [Вт/(м град)]	M , [г/моль]	γ
Воздух (20 ⁰ С)	0,0000185	1005	0,026	29	1,41
Гелий (-40 ⁰ С)	0,0000167	5188	0,131	4	1,67
Водяной пар	0,0000161	1940	0,033	18	1,31
Гелий-ксеноновая смесь (95% ксенона) (200 ⁰ С)	0,0000382	410	0,067	50	1,67
Гелий-ксеноновая смесь (50% ксенона) (100 ⁰ С)	0,0000263	2675	0,160	7,8	1,67

Давление для всех случаев равно 101325 Па.

Длина пластины:

Скорость набегающего потока:

Температура набегающего потока:

Температура стенки:

2. Подготовить программу на языке Fortran, реализующую неявный метод численного интегрирования уравнений турбулентного динамического и теплового пограничных слоёв с устранением нелинейности и сопряжённости простым итерационным методом.

3. Провести компиляцию и отладку программы.

4. Рассчитать расстояние $x_{кр}$, на котором локальное значение числа Рейнольдса превышает критическое. Напомним, критическое число Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода для внешнего обтекания плоской стенки $Re_{кр} \approx 4 \cdot 10^5$.

5. Выполнить расчёты пяти профилей скорости, температуры и турбулентной вязкости на участке от $x_{кр}$ до L на равном расстоянии друг от друга.

Построить графики в программе Excel, Origin или др. Сделать выводы о росте толщины динамического и теплового пограничных слоёв при турбулентном режиме течения. Сделать вывод о влиянии числа Прандтля газа на отношение толщин теплового и динамического пограничных слоёв. Занести полученные данные в отчёт.

6. Выполнить расчёты пяти профилей скорости и температуры в тех же сечениях по длине пластины, но с постоянным значением турбулентной вязкости близким к нулю ($\mu_t = 10^{-15} = \text{const}$). Полученное решение будет соответствовать ламинарному режиму течения. Нанести полученные результаты на предыдущие графики. Сделать вывод о распределении скорости и температуры при ламинарном и турбулентном режимах течения в пограничном слое.

7. Выполнить расчёты интегральных параметров течения (локального коэффициента поверхностного трения, числа Нуссельта) в зависимости от локального числа Рейнольдса. Построить графики зависимости коэффициента трения и числа Нуссельта от числа Рейнольдса в логарифмических координатах. Нанести на график формулы

$$\boxed{Nu = 0.0296 Re_x^{0.8} Pr_0^{0.43} \left(\frac{Pr_0}{Pr_{ст}} \right)^{0.25}} .$$

Сделать выводы о влиянии числа Прандтля и числа Маха на сопротивление пластины и теплоотдачу от её сетки. Занести полученные результаты в отчёт.

6. Занести текст программы в отчёт.

7. Оформить отчёт. Подготовиться к защите лабораторной работы.

8. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Схема решаемой задачи с указанием расчётной области, граничных условий и параметров задачи.
4. Основные формулы, используемые при расчетах.
5. Результаты моделирования.
6. Тексты программ.
7. Выводы по работе.

9. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличаются осреднённые уравнения турбулентного пограничного слоя от уравнений пограничного слоя, используемых при моделировании ламинарных течений?
2. Что такое Рейнольдсовы напряжения?
3. Понятия турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля?
4. Каково влияние числа Прандтля на толщину турбулентного теплового пограничного слоя по сравнению с ламинарным?
5. Что такое ламинарный подслой и как он учитывается в модели турбулентности Прандтля?
6. Что такое длина пути смешения?
7. Почему турбулентное число Прандтля близко к единице?